

The Kerr Trisector Closure

Ein Selbstkonsistenz-Test der Allgemeinen Relativitätstheorie

Tanha Aronno Mirdha und Malte Mühlenfeld
Gymnasium Heißen, Mülheim an der Ruhr, Germany
aronnomirdha@outlook.com, malte.muehlenfeld@outlook.de

Jugend forscht 2026

Zusammenfassung

Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt Gravitation als die Geometrie der Raumzeit. Nach der Theorie sollten alle durch Gravitation verursachten beobachtbaren Effekte durch eine einzige Raumzeitbeschreibung erklärt werden. Die meisten bisherigen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie untersuchen jedoch verschiedene physikalische Effekte getrennt voneinander und überprüfen nicht direkt, ob diese miteinander konsistent sind. In dieser Arbeit stellen wir die *Kerr Trisector Closure (KTC)* vor, eine Methode zur Überprüfung der internen Konsistenz der Raumzeitgeometrie in der Umgebung eines Schwarzen Lochs. Die Methode vergleicht unabhängige Messungen von Masse und Spin eines Schwarzen Lochs, die aus drei verschiedenen Beobachtungssektoren gewonnen werden: Orbitalbewegung, Ringdown gravitativer Wellen und die Abbildung Schwarzer Löcher. Wenn die Allgemeine Relativitätstheorie korrekt ist, müssen alle drei Messungen innerhalb ihrer experimentellen Unsicherheiten übereinstimmen. Wir formulieren eine mathematische Closure-Statistik, die den Grad der Übereinstimmung zwischen den Sektoren quantifiziert. Anhand simulierter Daten zeigen wir, dass sich die Methode wie erwartet verhält: Sie zeigt keine falschen Inkonsistenzen an, wenn alle Messungen konsistent sind, und erkennt zuverlässig Abweichungen, wenn ein Sektor inkonsistent ist. Die Kerr Trisector Closure stellt damit eine einfache und modellunabhängige Möglichkeit dar, zu testen, ob verschiedene Beobachtungen eines Schwarzen Lochs dieselbe Raumzeitgeometrie beschreiben.

1 Einführung

Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt Gravitation als die Krümmung der Raumzeit. Masse und Energie krümmen die Raumzeit, und diese Krümmung bestimmt, wie sich Objekte bewegen, wie sich Licht ausbreitet und wie Zeit vergeht. In diesem Bild ist Gravitation keine Kraft, sondern eine geometrische Eigenschaft der Raumzeit selbst. Im Laufe des letzten Jahrhunderts haben viele Experimente und Beobachtungen einzelne Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie bestätigt. Die Bewegung der Planeten stimmt mit der Theorie überein, Gravitationswellen aus verschmelzenden Schwarzen Löchern wurden nachgewiesen, und Bilder von Schwarzen-Loch-Schatten wurden aufgenommen. Jede dieser Beobachtungen unterstützt die Allgemeine Relativitätstheorie innerhalb ihres jeweiligen physikalischen Bereichs. Diese Tests werden jedoch meist getrennt voneinander durchgeführt. Orbitalbewegungen, Gravitationswellen und die Abbildung Schwarzer Löcher werden unabhängig analysiert, obwohl sie alle von derselben Raumzeitgeometrie bestimmt werden. Daher überprüfen bestehende Tests nicht direkt, ob alle Beobachtungen eines einzelnen Schwarzen Lochs miteinander konsistent sind und dieselbe Raumzeitbeschreibung teilen. Dieses Projekt greift genau diese fehlende Konsistenzprüfung auf. Es stellt eine einfache, aber grundlegende Frage:

Beschreiben verschiedene Beobachtungen desselben Schwarzen Lochs tatsächlich dieselbe Raumzeitgeometrie, wie es von der Allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagt wird?

2 Die Kerr-Raumzeit

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist Gravitation keine Kraft. Stattdessen krümmen Masse und Energie die Raumzeit, und Objekte bewegen sich entlang von Bahnen, die durch diese Krümmung bestimmt werden. Ein Schwarzes Loch wird daher nicht als fester Körper beschrieben, sondern als eine besondere Struktur der Raumzeit selbst. Ein ungeladenes und rotierendes Schwarzes Loch wird durch

die *Kerr-Lösung* beschrieben. Diese Lösung stellt die Raumzeitgeometrie außerhalb des Schwarzen Lochs dar, einschließlich des Bereichs, in dem sich Materie bewegt, Gravitationswellen ausgesendet werden und Licht abgelenkt wird. Bemerkenswerterweise hängt die Kerr-Raumzeit nur von zwei physikalischen Parametern ab: der Masse M und dem dimensionslosen Spin χ . Die Masse bestimmt, wie stark die Raumzeit gekrümmt ist, während der Spin beschreibt, wie schnell sich das Schwarze Loch dreht und wie stark es die Raumzeit mit sich zieht. Der dimensionslose Spin ist definiert als

$$\chi = \frac{J}{M^2}, \quad |\chi| \leq 1, \quad (1)$$

wobei J der Drehimpuls des Schwarzen Lochs ist. Hier sind J und M in geometrischen Einheiten angegeben, sodass der Spinparameter χ dimensionslos ist. Die obere Grenze $|\chi| = 1$ entspricht der maximalen Rotation, die von der Allgemeinen Relativitätstheorie erlaubt wird. Alle physikalischen Prozesse außerhalb des Schwarzen Lochs, wie die Bewegung von Teilchen, die Emission von Gravitationswellen und die Bahnen von Lichtstrahlen, werden vollständig durch die Werte von M und χ bestimmt. Sind diese beiden Parameter bekannt, ist die äußere Raumzeitgeometrie festgelegt. In dieser Arbeit verwenden wir geometrische Einheiten, in denen die Gravitationskonstante und die Lichtgeschwindigkeit auf eins gesetzt werden ($G = c = 1$).

3 Drei Wege zur Messung derselben Raumzeit

Ein Schwarzes Loch kann nicht direkt beobachtet werden. Stattdessen wird seine Raumzeitgeometrie über die Auswirkungen untersucht, die sie auf Materie, Strahlung und die Bewegung von Licht hat. Verschiedene Beobachtungen messen daher unterschiedliche physikalische Konsequenzen derselben Raumzeit. In diesem Projekt betrachten wir drei unabhängige Möglichkeiten, die Geometrie um ein Schwarzes Loch zu messen. Jede Methode untersucht einen anderen physikalischen Prozess, alle werden jedoch von derselben Kerr-Raumzeit bestimmt.

3.1 Orbitalbewegung (Dynamischer Sektor)

Die Krümmung der Raumzeit bestimmt, wie sich massereiche Objekte bewegen. Wenn zwei kompakte Objekte einander umkreisen, folgt ihre Bewegung der Geometrie der umgebenden Raumzeit. In engen Doppelsternsystemen erzeugt diese Bewegung Gravitationswellen. Während sich die Objekte spiralförmig einander annähern, ändern sich Frequenz und Form des Gravitationswellensignals auf genau vorhersehbare Weise. Diese Entwicklung hängt von der Masse und dem Spin des Schwarzen Lochs ab, da diese Größen festlegen, wie stark die Raumzeit gekrümmt ist. Durch die Analyse des Gravitationswellensignals während der Inspiral-Phase können wir eine Schätzung der Raumzeitparameter bestimmen:

$$(M_{\text{dyn}}, \chi_{\text{dyn}}). \quad (2)$$

3.2 Ringdown-Oszillationen (Perturbativer Sektor)

Nachdem ein Schwarzes Loch entstanden ist oder gestört wurde, kehrt es nicht sofort in einen stabilen Zustand zurück. Stattdessen durchläuft es eine kurze Phase von Oszillationen, während es sich beruhigt. Dieser Vorgang wird als Ringdown bezeichnet. Der Ringdown verhält sich wie eine gedämpfte Schwingung, ähnlich dem Klang einer angeschlagenen Glocke. Die Frequenzen und Abklingzeiten dieser Oszillationen hängen ausschließlich von der Masse und dem Spin des Schwarzen Lochs ab. Sie sind unabhängig davon, wie das Schwarze Loch entstanden ist. Durch die Messung des Ringdown-Signals erhalten wir eine zweite, unabhängige Schätzung der Raumzeit:

$$(M_{\text{rd}}, \chi_{\text{rd}}). \quad (3)$$

3.3 Lichtbahnen und Abbildung (Optischer Sektor)

Licht bewegt sich in der Nähe eines Schwarzen Lochs nicht entlang gerader Linien. Stattdessen werden seine Bahnen durch die starke Krümmung der Raumzeit abgelenkt. Einige Lichtstrahlen können das Schwarze Loch sogar umkreisen, bevor sie entkommen. Dieses Verhalten erzeugt sichtbare Strukturen, wie den dunklen Schatten, der von einem hellen Photonenring umgeben ist. Hochauflösende Bilder können die Größe und Form dieser Strukturen messen. Aus der Abbildung Schwarzer Löcher erhalten wir eine dritte Schätzung der Raumzeitparameter:

$$(M_{\text{img}}, \chi_{\text{img}}). \quad (4)$$

4 Hypothese

Dieses Projekt basiert auf einer einzelnen, überprüfbaren Hypothese. Die Allgemeine Relativitätstheorie sagt voraus, dass Gravitation vollständig durch die Geometrie der Raumzeit beschrieben wird. Für ein Schwarzes Loch bedeutet dies, dass alle beobachtbaren Effekte außerhalb des Schwarzen Lochs durch eine einzige Raumzeitlösung bestimmt werden. Unsere Hypothese lautet daher:

Wenn die Allgemeine Relativitätstheorie Gravitation korrekt beschreibt, dann sind unabhängige Messungen der Masse und des Spins eines Schwarzen Lochs, die aus Orbitalbewegung, Ringdown-Oszillationen und der Abbildung Schwarzer Löcher gewonnen werden, statistisch konsistent mit einer einzigen Kerr-Raumzeit.

In der Praxis werden die Messungen nicht exakt identisch sein, da jede Beobachtung mit Unsicherheiten behaftet ist. Die Hypothese gilt als bestätigt, solange die Unterschiede zwischen den Messungen durch diese Unsicherheiten erklärt werden können. Wenn jedoch mindestens eine Messung stärker von den anderen abweicht, als es aufgrund der experimentellen Unsicherheit zu erwarten wäre, ist die Hypothese verletzt. Ein solches Ergebnis würde darauf hindeuten, dass die verschiedenen Beobachtungen nicht dieselbe Raumzeitgeometrie beschreiben.

5 Die Kerr Trisector Closure Methode

Die Kerr Trisector Closure (KTC) ist eine Methode, um zu überprüfen, ob verschiedene Beobachtungen desselben Schwarzen Lochs dieselbe Raumzeitgeometrie beschreiben. In der Allgemeinen Relativitätstheorie bestimmt die Struktur der Raumzeit selbst alle physikalischen Effekte der Gravitation. Die Kerr-Raumzeit beschreibt die Struktur eines Schwarzen Lochs und hängt ausschließlich von dessen Masse und Spin ab. Das bedeutet, dass alle beobachtbaren Effekte, wie die Bewegung von Materie, die Aussendung von Gravitationswellen und die Ablenkung von Licht, durch dieselbe Raumzeit bestimmt sein sollten. In der Praxis werden diese Effekte jedoch auf sehr unterschiedliche Weise beobachtet. Jeder Beobachtungsbereich nutzt andere physikalische Prozesse und unterschiedliche Messinstrumente, um Masse und Spin des Schwarzen Lochs zu bestimmen. Dadurch besitzt jede Messung ihre eigenen Unsicherheiten, und die ermittelten Werte sind niemals exakt identisch. Die Kerr Trisector Closure hat das Ziel festzustellen, ob die Unterschiede zwischen diesen Messungen durch normale experimentelle Unsicherheiten erklärt werden können oder ob sie zu groß sind, um auf diese Weise erklärt zu werden. Sind die Unterschiede klein genug, können alle Beobachtungen als Beschreibung derselben Kerr-Raumzeit verstanden werden. Sind die Unterschiede jedoch zu groß, bedeutet dies, dass mindestens eine Beobachtung nicht mit den anderen übereinstimmt und die Konsistenz der Raumzeitbeschreibung nicht mehr gegeben ist.

5.1 Parameterschätzungen aus jedem Sektor

Wir beschreiben die Raumzeit eines Schwarzen Lochs durch den Parametervektor

$$\Theta = (M, \chi), \quad (5)$$

wobei M die Masse und χ der dimensionslose Spin ist.

Jeder Beobachtungsbereich liefert eine unabhängige Schätzung dieser Parameter:

$$\hat{\Theta}_{\text{dyn}} = (M_{\text{dyn}}, \chi_{\text{dyn}}), \quad (6)$$

$$\hat{\Theta}_{\text{rd}} = (M_{\text{rd}}, \chi_{\text{rd}}), \quad (7)$$

$$\hat{\Theta}_{\text{img}} = (M_{\text{img}}, \chi_{\text{img}}). \quad (8)$$

Diese Schätzungen sind mit Unsicherheiten verbunden, die wir durch Kovarianzmatrizen Σ_{dyn} , Σ_{rd} und Σ_{img} darstellen. Jede Kovarianzmatrix beschreibt, wie genau der jeweilige Sektor die Parameter M und χ messen kann.

5.2 Die gemeinsame Best-Fit-Raumzeit

Wenn alle Beobachtungen dieselbe Kerr-Raumzeit beschreiben, sollte es ein einzelnes Parameterpaar geben,

$$\bar{\Theta} = (\bar{M}, \bar{\chi}) \quad (9)$$

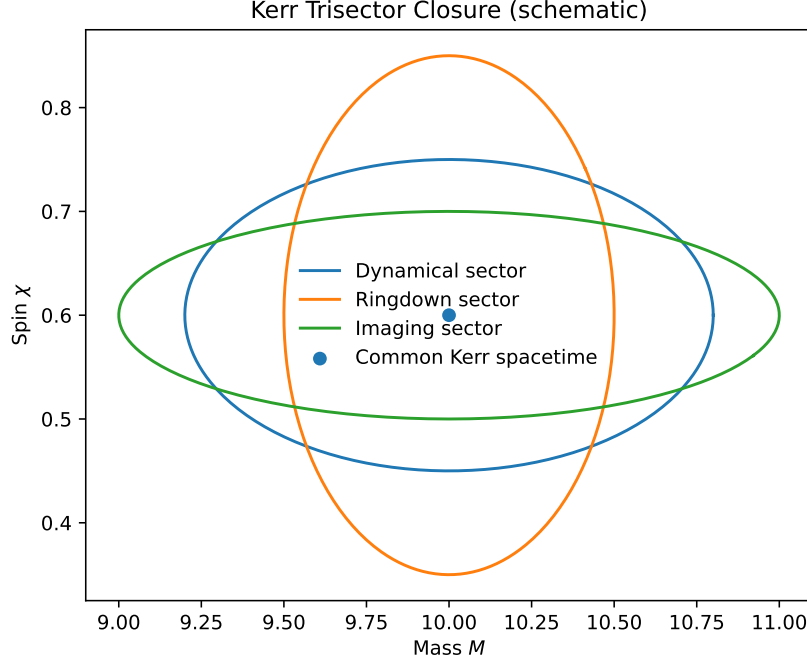


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Kerr Trisector Closure. Jede Ellipse stellt den Unsicherheitsbereich einer Masse-Spin-Messung dar, die aus einem anderen Beobachtungssektor gewonnen wurde: Orbitalbewegung (dynamisch), Ringdown-Schwingungen und Schwarzloch-Bildgebung. Wenn alle drei Sektoren denselben Raum-Zeit-Bereich beschreiben, überlappen sich ihre Unsicherheitsbereiche in der Nähe eines einzigen Punktes (dem gemeinsamen Kerr-Raum-Zeit-Bereich). Der Abschluss-Test quantifiziert, ob eine solche Übereinstimmung vorliegt.)

das mit allen drei Messungen vereinbar ist. Wir bestimmen diese gemeinsame Best-Fit-Raumzeit, indem wir die Werte von $\bar{\Theta}$ so wählen, dass die gesamte quadratische Abweichung von den drei Sektorschätzungen minimiert wird, wobei deren Unsicherheiten berücksichtigt werden. Anschaulich gesprochen liegt die Best-Fit-Raumzeit gleichzeitig möglichst nahe an allen drei Messungen.

5.3 Definition der Closure-Probe

Um zu überprüfen, ob die Messungen konsistent sind, definieren wir zunächst die Abweichung jedes Sektors von der gemeinsamen Best-Fit-Raumzeit:

$$\delta\Theta_k = \hat{\Theta}_k - \bar{\Theta}, \quad k \in \{\text{dyn}, \text{rd}, \text{img}\}. \quad (10)$$

Diese Abweichungsvektoren geben an, wie weit jede einzelne Messung von der gemeinsamen Kerr-Raumzeit entfernt liegt. Anschließend fassen wir alle Abweichungen zu einer einzigen Größe zusammen, der sogenannten *Closure-Statistik*:

$$T^2 = \sum_k \delta\Theta_k^T \Sigma_k^{-1} \delta\Theta_k. \quad (11)$$

Diese Größe T^2 ist die mathematische Probe, die in der Kerr Trisector Closure verwendet wird. Sie misst die gesamte Inkonsistenz zwischen den drei Messungen, wobei ihre jeweiligen Unsicherheiten korrekt berücksichtigt werden.

Die Closure-Statistik T^2 besitzt eine direkte physikalische Bedeutung. Sie misst, wie stark sich die drei Messungen von Masse und Spin voneinander unterscheiden, wobei ihre jeweiligen Unsicherheiten berücksichtigt werden. Ist der Wert von T^2 klein, können die Unterschiede zwischen den Messungen durch experimentelle Unsicherheiten erklärt werden. In diesem Fall sind alle Beobachtungen mit einer einzigen Kerr-Raumzeit vereinbar, und die Raumzeit gilt als *geschlossen*. Ist der Wert von T^2 hingegen groß, sind die Unterschiede zwischen den Messungen zu groß, um allein durch Unsicherheiten erklärt zu werden. Dies zeigt an, dass mindestens ein Beobachtungssektor nicht mit den anderen übereinstimmt und die Raumzeitbeschreibung nicht mehr konsistent ist. In dieser Methode vergleichen wir drei unabhängige Messungen

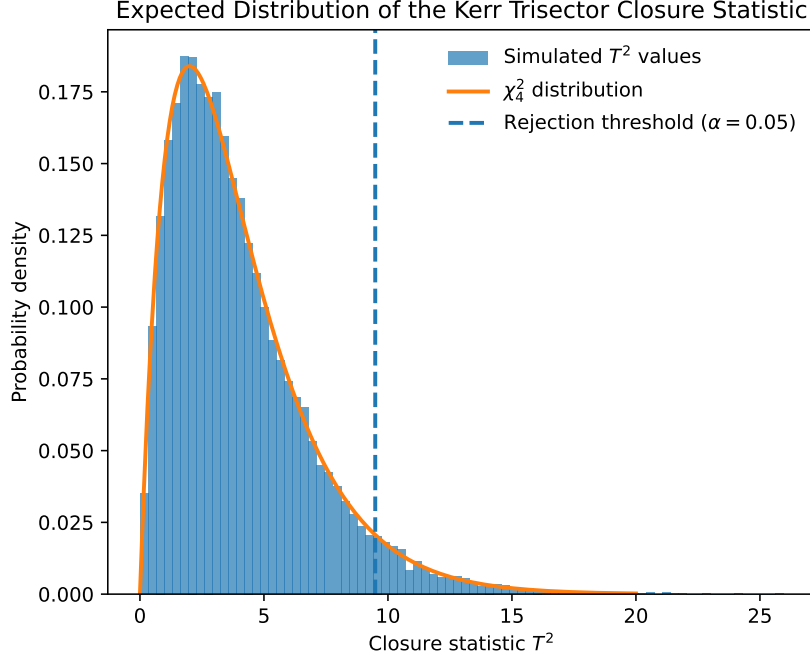


Abbildung 2: Verteilung der Kerr Trisector Closure-Statistik T^2 , die aus simulierten, untereinander konsistenten Messungen gewonnen wurde. Die durchgezogene Kurve zeigt die theoretische Chi-Quadrat-Verteilung mit vier Freiheitsgraden. Die gestrichelte Linie markiert die Ablehnungsgrenze auf dem 5%-Niveau. Werte von T^2 rechts von dieser Linie weisen auf eine statistisch signifikante Inkonsistenz hin.

von zwei physikalischen Parametern. Dadurch ergeben sich vier unabhängige Freiheitsgrade. Aus diesem Grund folgt die Closure-Statistik T^2 , sofern alle Messungen dieselbe Kerr-Raumzeit beschreiben, einer Chi-Quadrat-Verteilung mit vier Freiheitsgraden. Überschreitet der beobachtete Wert von T^2 den aus dieser Verteilung erwarteten Bereich, wird die Hypothese einer einzelnen Kerr-Raumzeit verworfen.

6 Demonstration mit simulierten Daten

Derzeit wurde noch kein und dasselbe astrophysikalische Schwarze Loch gleichzeitig in allen drei Sektoren (Orbitalbewegung, Ringdown und Abbildung) mit hoher Präzision vermessen. Aus diesem Grund testen wir zunächst die *Methode selbst* mithilfe simulierter Daten. In dieser Arbeit nehmen wir an, dass die Messfehler der drei Beobachtungssektoren statistisch unabhängig sind. Das Ziel dieser Demonstration ist einfach: Wir möchten überprüfen, dass sich die Kerr Trisector Closure wie erwartet verhält.

Idee der Simulation. Wir beginnen mit der Wahl einer „wahren“ Schwarzen-Loch-Raumzeit mit festgelegten Parametern

$$\Theta^* = (M^*, \chi^*). \quad (12)$$

Anschließend erzeugen wir drei unabhängige „Messungen“ von Θ^* , jeweils eine aus jedem Sektor. Jede Messung enthält einen zufälligen Fehler, da reale Experimente stets verrauscht sind. Wenn die Allgemeine Relativitätstheorie über alle drei Sektoren hinweg konsistent ist, sollten diese Fehler ausreichen, um kleine Unterschiede zwischen den Sektoren zu erklären. Fügen wir hingegen künstlich eine systematische Abweichung in einem Sektor hinzu, sollte die Closure-Statistik diese erkennen.

Mathematisches Modell für eine simulierte Messung. Für jeden Sektor $k \in \{\text{dyn}, \text{rd}, \text{img}\}$ simulieren wir einen gemessenen Parametervektor

$$\hat{\Theta}_k = \Theta^* + \varepsilon_k, \quad (13)$$

wobei der Messfehler ε_k ein zweidimensionaler Zufallsvektor ist. Wir nehmen an, dass er normalverteilt ist mit dem Mittelwert null und der Kovarianzmatrix Σ_k :

$$\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_k). \quad (14)$$

Diese Gaußsche Approximation ist gültig, wenn die Messungen nahe an der Best-Fit-Lösung liegen, was genau der für Konsistenztests relevante Bereich ist. Die Annahme stellt eine übliche erste Näherung dar: In der Nähe der Best-Fit-Lösung verhalten sich viele Messunsicherheiten näherungsweise wie eine Gaußverteilung. Der Einfachheit halber nehmen wir in dieser Demonstration an, dass die Kovarianzmatrizen diagonal sind, was bedeutet, dass wir die Fehler von Masse und Spin als unkorreliert behandeln:

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_{M,k}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\chi,k}^2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

(Die KTC-Methode funktioniert auch mit nicht-diagonalen Σ_k ; der diagonale Fall ist jedoch leichter zu erklären und demonstriert bereits die zentrale Idee.)

Schritt 1: Berechnung der gemeinsamen Best-Fit-Raumzeit. Aus den drei Messungen $\hat{\Theta}_k$ berechnen wir ein gemeinsames Best-Fit-Paar $\bar{\Theta} = (\bar{M}, \bar{\chi})$. Dieses ist definiert als der Wert von Θ , der die gewichtete Abweichung minimiert:

$$\chi^2(\Theta) = \sum_k (\hat{\Theta}_k - \Theta)^T \Sigma_k^{-1} (\hat{\Theta}_k - \Theta). \quad (16)$$

Dabei wird $\chi^2(\Theta)$ ausschließlich zur Bestimmung der Best-Fit-Parameter verwendet, während T^2 die Closure-Statistik für den Konsistenztest darstellt. Anschaulich handelt es sich um eine gewichtete Version des „Findens des besten Mittelwerts“: Messungen mit kleineren Unsicherheiten (kleineren Σ_k) werden stärker gewichtet. Das Minimum lässt sich explizit schreiben als

$$\bar{\Theta} = \left(\sum_k \Sigma_k^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_k \Sigma_k^{-1} \hat{\Theta}_k \right). \quad (17)$$

Schritt 2: Berechnung der Closure-Statistik. Wir definieren die Abweichung jedes Sektors von der gemeinsamen Best-Fit-Raumzeit als

$$\delta\Theta_k = \hat{\Theta}_k - \bar{\Theta}. \quad (18)$$

Die Kerr Trisector Closure-Probe ist anschließend die Closure-Statistik

$$T^2 = \sum_k \delta\Theta_k^T \Sigma_k^{-1} \delta\Theta_k. \quad (19)$$

Dieser Wert ist klein, wenn alle drei Sektoren innerhalb ihrer Unsicherheiten übereinstimmen, und wird groß, wenn ein Sektor zu stark von den anderen abweicht.

Warum die Anzahl der Freiheitsgrade 4 beträgt? Wir haben 3 Sektoren, und jeder liefert 2 Werte (M, χ), sodass insgesamt 6 Messwerte vorliegen. Wir passen 2 gemeinsame Parameter ($\bar{M}, \bar{\chi}$) an. Damit verbleiben $6 - 2 = 4$ unabhängige „verbleibende“ Informationsanteile. Wenn alle Messungen mit einer einzigen Kerr-Raumzeit konsistent sind, folgt die Statistik T^2 daher einer Chi-Quadrat-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden.

Test A: Konsistente (GR-ähnliche) Daten dürfen keine Fehlalarme auslösen. Wir erzeugen viele simulierte Tripel ($\hat{\Theta}_{\text{dyn}}, \hat{\Theta}_{\text{rd}}, \hat{\Theta}_{\text{img}}$) mithilfe des oben beschriebenen Modells und berechnen für jedes Tripel den Wert von T^2 . Für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ (5%) ist die Ablehnungsgrenze das 95%-Quantil der Verteilung χ_4^2 , also

$$T^2 > \chi_{4,0.95}^2 \approx 9.49. \quad (20)$$

Bei einer korrekten Methode sollten nur etwa 5% vollkommen konsistenter Datensätze diese Grenze überschreiten; dies entspricht statistischen Zufallsschwankungen.

In einem beispielhaften Monte-Carlo-Test mit $N = 200,000$ simulierten Datensätzen erhielten wir

$$\langle T^2 \rangle \approx 4.00, \quad \Pr(T^2 > 9.49) \approx 0.050, \quad (21)$$

was sehr gut mit dem erwarteten Verhalten der χ_4^2 -Verteilung übereinstimmt. Dies zeigt, dass die KTC-Methode keine falsche Inkonsistenz anzeigt, wenn die Sektoren von vornherein konsistent konstruiert sind.

Test B: Eine kontrollierte Inkonsistenz sollte erkannt werden. Als Nächstes führen wir eine künstliche, systematische Verschiebung in einem Sektor ein. Beispielsweise verändern wir ausschließlich den Abbildungssektor, indem wir einen festen Verzerrungsvektor Δ addieren:

$$\hat{\Theta}_{\text{img}} = \Theta^* + \Delta + \varepsilon_{\text{img}}, \quad (22)$$

während wir die beiden anderen Sektoren unverändert lassen,

$$\hat{\Theta}_{\text{dyn}} = \Theta^* + \varepsilon_{\text{dyn}}, \quad \hat{\Theta}_{\text{rd}} = \Theta^* + \varepsilon_{\text{rd}}. \quad (23)$$

Damit beschreiben die drei Sektoren nicht länger dieselbe Raumzeit, sodass die Closure-Statistik größer werden und die Ablehnungsgrenze häufiger überschreiten sollte.

In einem Beispiel, in dem wir eine moderate Verzerrung im Abbildungssektor eingeführt haben, stellten wir fest, dass sich die Werte von T^2 deutlich zu größeren Werten verschoben und in einem großen Anteil der simulierten Datensätze die 5%-Grenze überschritten. Dies zeigt, dass die KTC-Methode empfindlich auf Inkonsistenzen reagiert, die nicht durch Messunsicherheiten erklärt werden können.

Identifikation des abweichenden Sektors. Um zu bestimmen, welcher Sektor die Inkonsistenz verursacht, berechnen wir zusätzlich die einzelnen Sektorbeiträge

$$T_k^2 = \delta\Theta_k^T \Sigma_k^{-1} \delta\Theta_k, \quad T^2 = T_{\text{dyn}}^2 + T_{\text{rd}}^2 + T_{\text{img}}^2. \quad (24)$$

Im Test mit eingeführter Verzerrung stammt der größte Beitrag typischerweise aus dem Sektor, in dem die Verzerrung eingebracht wurde, was eine eindeutige Diagnose der Ursache ermöglicht.

Insgesamt zeigen diese Simulationen, dass sich die Kerr Trisector Closure korrekt verhält: Sie bleibt unauffällig, wenn alle Sektoren konsistent sind, und reagiert deutlich, wenn eine reale Inkonsistenz vorliegt.

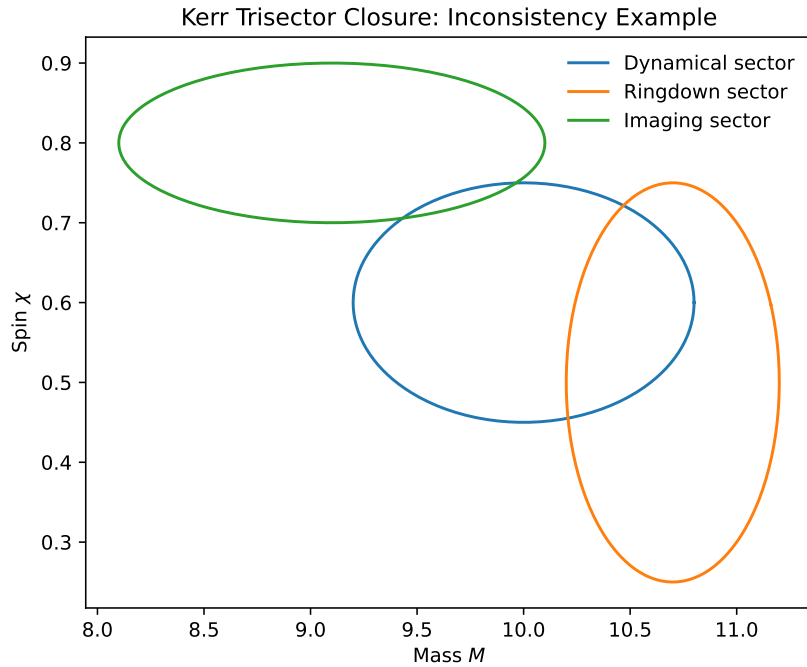


Abbildung 3: Schematische Darstellung einer fehlgeschlagenen Kerr Trisector Closure. Die Unsicherheitsbereiche der drei Beobachtungssektoren überlappen sich nicht. Eine solche Konfiguration führt zu einer großen Closure-Statistik T^2 und zeigt an, dass die Beobachtungen nicht durch eine einzelne Kerr-Raumzeit beschrieben werden können.

7 Diskussion

Die Kerr Trisector Closure überprüft nicht nur, ob die Raumzeitbeschreibung konsistent ist, sondern liefert auch Hinweise darauf, woher eine mögliche Inkonsistenz stammen könnte. Wird eine signifikante Abweichung festgestellt, müssen sich die Abweichungen von der erwarteten Kerr-Raumzeit nicht gleichmäßig auf alle Beobachtungssektoren verteilen. Stattdessen kann ein einzelner Sektor deutlich stärker von den anderen abweichen. Die Art und Verteilung dieser Abweichungen kann daher Aufschluss über den physikalischen Ursprung des Problems geben. Tritt die größte Abweichung im dynamischen Sektor auf, deutet dies darauf hin, dass die Bewegung massereicher Objekte nicht der von der Kerr-Lösung vorhergesagten Raumzeitgeometrie folgt. Ein solches Ergebnis würde auf Änderungen in der Orbitaldynamik

oder der Ausbreitung von Gravitationswellen hinweisen. Zeigt sich die dominante Abweichung hingegen im Ringdown-Sektor, bedeutet dies, dass die Oszillationsfrequenzen des Schwarzen Lochs nicht mit den Kerr-Vorhersagen übereinstimmen. Da der Ringdown besonders empfindlich auf die Umgebung des Ereignishorizonts reagiert, würde eine solche Abweichung auf neue Effekte in der nahen Horizontregion der Raumzeit hindeuten. Ist die Inkonsistenz am stärksten im Abbildungssektor ausgeprägt, so weist dies darauf hin, dass die Ausbreitung von Licht in der Nähe des Schwarzen Lochs nicht der erwarteten Kerr-Geometrie entspricht. Dies könnte auf veränderte Eigenschaften der Lichtausbreitung in stark gekrümmter Raumzeit hinweisen. Wenn schließlich alle drei Sektoren große und vergleichbare Abweichungen zeigen, kann die Inkonsistenz nicht mehr auf einen einzelnen physikalischen Prozess zurückgeführt werden. In diesem Fall ist die naheliegendste Interpretation, dass die Kerr-Beschreibung selbst nicht ausreicht, um die äußere Raumzeit durch eine einzige Kerr-Metrik zu beschreiben.

8 Fazit

In dieser Arbeit haben wir die Kerr Trisector Closure vorgestellt, eine Methode zur Überprüfung, ob verschiedene Beobachtungen desselben Schwarzen Lochs eine einzelne, konsistente Raumzeitgeometrie beschreiben, wie es von der Allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagt wird. Die Methode basiert auf einer einfachen Idee: Wenn Gravitation vollständig durch die Geometrie der Raumzeit beschrieben wird, müssen unabhängige Messungen der Masse und des Spins eines Schwarzen Lochs, die aus unterschiedlichen physikalischen Prozessen stammen, innerhalb ihrer experimentellen Unsicherheiten übereinstimmen. Wir haben dieses Konzept auf drei Beobachtungssektoren angewendet: Orbitalbewegung, Gravitationswellen-Ringdown und die Abbildung Schwarzer Löcher. Dazu formulierten wir eine Closure-Statistik, die den Grad der Übereinstimmung zwischen diesen Sektoren quantitativ misst. Mithilfe simulierter Daten zeigten wir, dass sich die Methode wie beabsichtigt verhält. Sind alle Messungen konstruktionsbedingt konsistent, bleibt die Closure-Statistik innerhalb des erwarteten statistischen Bereichs. Wird in einem Sektor eine künstliche Inkonsistenz eingeführt, erkennt die Methode die Abweichung zuverlässig und identifiziert deren Ursprung. Die Kerr Trisector Closure stellt eine modellunabhängige Möglichkeit dar, die interne Konsistenz der Raumzeitgeometrie zu testen, ohne eine spezifische Modifikation der Allgemeinen Relativitätstheorie anzunehmen. Obwohl gegenwärtige Beobachtungen noch keine vollständige experimentelle Anwendung der Methode erlauben, könnten zukünftige Gravitationswellendetektoren und hochauflösende Experimente zur Abbildung Schwarzer Löcher solche Tests ermöglichen. Insgesamt zeigt diese Arbeit, dass sich die Idee der Raumzeitkonsistenz in ein konkretes und überprüfbares Kriterium überführen lässt. Unabhängig davon, ob sie durch zukünftige Beobachtungen bestätigt oder widerlegt wird, bietet die Kerr Trisector Closure einen klaren Rahmen zur Untersuchung der geometrischen Grundlagen der Gravitation.

Literatur

- [1] L. Barack and C. Cutler. Using lisa emri sources to test off-kerr deviations in the geometry of massive black holes. *Phys. Rev. D*, 75:042003, 2007.
- [2] E. Barausse, N. Yunes, and K. Chamberlain. Theory-independent tests of general relativity with gravitational waves. *Phys. Rev. Lett.*, 116:241104, 2016.
- [3] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Class. Quantum Grav.*, 26:163001, 2009.
- [4] V. Cardoso, E. Franzin, and P. Pani. Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon? *Phys. Rev. Lett.*, 116:171101, 2016.
- [5] Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *Astrophys. J. Lett.*, 875(1):L1, 2019.
- [6] Event Horizon Telescope Collaboration. First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the image of the supermassive black hole in the center of the milky way. *Astrophys. J. Lett.*, 930(2):L12, 2022.
- [7] Event Horizon Telescope Collaboration. Tests of general relativity with the 2017 event horizon telescope observations of m87*. *Astrophys. J. Lett.*, 930(2):L17, 2022.

- [8] S. Datta, A. Ghosh, and P. Ajith. Testing the binary black hole nature of gravitational-wave signals from the ringdown phase. *Phys. Rev. D*, 108:064036, 2023.
- [9] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847, 1915.
- [10] A. E. Broderick et al. The photon ring in m87* and tests of general relativity at the horizon scale. *Astrophys. J.*, 935(1):61, 2022.
- [11] A. Ghosh et al. Testing general relativity using golden black-hole binaries. *Phys. Rev. D*, 97:104060, 2018.
- [12] D. Psaltis et al. Gravitational test beyond the first post-newtonian order with the shadow of the m87 black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 125:141104, 2020.
- [13] E. Berti et al. Testing general relativity with present and future astrophysical observations. *Class. Quantum Grav.*, 32:243001, 2015.
- [14] G. Carullo et al. Evidence for the post-merger phase of gw150914 in the ligo livingston detector. *Phys. Rev. D*, 100:104036, 2019.
- [15] M. D. Johnson et al. The next-generation event horizon telescope: Science case and key goals. *Astrophys. J.*, 943(2):L33, 2023.
- [16] M. Evans et al. A horizon study for cosmic explorer: Science, observatories, and community. *arXiv preprint*, 2021.
- [17] M. Punturo et al. The einstein telescope: A third-generation gravitational wave observatory. *Class. Quantum Grav.*, 27:194002, 2010.
- [18] P. T. H. Pang et al. A numerical relativity waveform surrogate model for binary black hole coalescence beyond the ringdown. *Phys. Rev. D*, 104:104054, 2021.
- [19] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [20] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Tests of general relativity with the binary black hole signals from the first and second observing runs of advanced ligo and advanced virgo. *Phys. Rev. D*, 100:104036, 2019.
- [21] P. Amaro-Seoane et al. (LISA Consortium). Laser interferometer space antenna. *arXiv preprint*, 2017.
- [22] J. R. Gair, M. Vallisneri, S. L. Larson, and J. G. Baker. Testing general relativity with low-frequency, space-based gravitational-wave detectors. *Living Rev. Relativity*, 16(7), 2013.
- [23] S. A. Hughes. Trust but verify: The case for testing extreme-mass-ratio inspirals as probes of strong-field gravity. *Phys. Rev. D*, 81:064018, 2010.
- [24] M. Isi and W. M. Farr. Hierarchical tests of general relativity with gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 104:044037, 2021.
- [25] M. Isi, M. Giesler, W. M. Farr, M. A. Scheel, and S. A. Teukolsky. Testing the no-hair theorem with gw150914. *Phys. Rev. Lett.*, 123:111102, 2019.
- [26] T. Johannsen. Photon rings around kerr and kerr-like black holes. *Astrophys. J.*, 777(2):170, 2013.
- [27] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, 1963.
- [28] E. W. Leaver. An analytic representation for the quasi-normal modes of kerr black holes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 402:285–298, 1985.
- [29] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.

- [30] P. Pani and V. Cardoso. Are black holes in alternative theories serious astrophysical candidates? the example of einstein–dilaton–gauss–bonnet gravity. *Phys. Rev. D*, 79:084031, 2009.
- [31] W. H. Press. Long wave trains of gravitational waves from a vibrating black hole. *Astrophys. J. Lett.*, 170:L105, 1971.
- [32] T. Regge and J. A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108:1063–1069, 1957.
- [33] L. Rezzolla and A. Zhidenko. New parametrization for spherically symmetric black holes in metric theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 90:084009, 2014.
- [34] B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz. Physics, astrophysics, and cosmology with gravitational waves. *Living Rev. Relativity*, 12(2), 2009.
- [35] J. D. Schnittman. Astrophysics of extreme-mass-ratio inspirals. *Class. Quantum Grav.*, 35(10):104002, 2018.
- [36] S. A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. i. fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *Astrophys. J.*, 185:635–648, 1973.
- [37] C. V. Vishveshwara. Scattering of gravitational radiation by a schwarzschild black-hole. *Nature*, 227:936–938, 1970.
- [38] C. M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativity*, 17(4), 2014.
- [39] N. Yunes and F. Pretorius. Fundamental theoretical bias in gravitational-wave astrophysics and the parameterized post-einsteinian framework. *Phys. Rev. D*, 80:122003, 2009.